

Correction de l'épreuve de physique II filière TSI/MP/PSI Concours CNC session 2010

EL FILALI SAID
CPGE BENI MELLAL
MAROC
= elfilalisaid@yahoo.fr =

LES CONDUCTEURS ÉLECTRIQUES

1^{ère} Partie : Conduction électrique dans un milieu matériel

1.1 Conductivité électrique d'un milieu matériel

1.1.1 L'équation du mouvement : On applique la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel supposé galiléen

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{E} - m \omega_o^2 \vec{r} - \frac{m}{\tau} \dot{\vec{r}} \implies \ddot{\vec{r}} + \frac{1}{\tau} \dot{\vec{r}} + \omega_o^2 \vec{r} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

1.1.2 Pour un \vec{E} sinusoïdal.

1.1.2.1 Grâce à la décomposition en séries de Fourier on s'intéresse au champ sinusoïdal.

1.1.2.2 En régime sinusoïdal établi \vec{r} est aussi sinusoïdal (puisque l'équation différentielle est linéaire) donc en notation complexe :

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{1}{\tau} \dot{\vec{r}} + \omega_o^2 \vec{r} = \frac{q}{m} \vec{E} \implies \vec{r} (\omega_o^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}) = \frac{q}{m} \vec{E} \text{ Et par conséquent}$$

$$\vec{V} = i \omega \vec{r} \implies \vec{V} = \frac{i \omega \frac{q}{m}}{\omega_o^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}} \vec{E}$$

1.1.3 L'expression de la densité volumique de charges

$$\rho = nq$$

1.1.4 L'expression de la densité de courant

$$\vec{j} = \rho \vec{V} \implies \vec{j} = nq \vec{V}$$

1.1.5 L'expression complexe de la densité de courant

$$\vec{j} = nq \vec{V} \implies \vec{j} = \frac{i n \omega \frac{q^2}{m}}{\omega_o^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}} \vec{E}$$

Qu'on peut écrire

$$\vec{j} = \frac{nq^2 \tau}{m} \frac{1}{1 + i \omega \tau \left(1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2}\right)} \vec{E}$$

1.1.6 D'après la loi d'Ohm locale on tire que

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m} \frac{1}{1 + i\omega\tau\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}$$

Par conséquent la conductivité statique vaut :

$$\sigma_o = \frac{nq^2\tau}{m}$$

1.2 Étude d'un milieu conducteur

1.2.1 L'expression complexe de la conduction électrique d'un milieu conducteur

$$\omega_o = 0 \implies \sigma = \frac{\sigma_o}{1 + i\omega\tau}$$

1.2.2 Les expressions de σ_1 et σ_2 .

Sachant que

$$\sigma = \frac{\sigma_o}{1 + i\omega\tau} \implies \sigma = \frac{\sigma_o}{1 + (\omega\tau)^2} - i \frac{\sigma_o\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$$

Il en résulte que

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_o}{1 + (\omega\tau)^2} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{\omega\tau\sigma_o}{1 + (\omega\tau)^2}$$

1.2.3 Cas du cuivre :

1.2.3.1 L'expression du nombre d'électrons de conduction par unité de volume :

On rappelle que : $\frac{N}{N_A} = \frac{m}{M_{Cu}} \implies N = \frac{m}{M_{Cu}} N_A$

$$n = \frac{N}{V} \implies n = \frac{N_A \rho_{Cu}}{M_{Cu}}$$

1.2.3.2 Application numérique

$$n = 8,44 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

1.2.3.3 La constante de temps

$$\sigma_o = \frac{nq^2\tau}{m} \implies \tau = \frac{m\sigma_o}{ne^2} \xrightarrow{\text{A.N}} \tau = 2,53 \times 10^{-14} \text{ s}$$

1.2.3.4 Domaine de fréquence :

$$\omega\tau \ll 1 \implies f \ll \frac{1}{2\pi\tau} = f_1 \xrightarrow{\text{A.N}} f_1 = 6,29 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

Relation valable dans le domaine infra-rouge.

1.2.4 Les expressions approchées à l'ordre 1.

► Pour σ_1 on a :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_o}{1 + (\omega\tau)^2} \Rightarrow \sigma_1 \simeq \sigma_o$$

► Pour σ_2 on a :

$$\sigma_2 = \frac{\omega\tau\sigma_o}{1 + (\omega\tau)^2} \Rightarrow \sigma_2 \simeq \tau\omega\sigma_o$$

1.2.5 Montrons la relation (3) :

$$\vec{j} = (\sigma_o - i\tau\omega\sigma_o)\vec{E} \xrightarrow[\text{réelle}]{\text{En notation}} \vec{j} = \sigma_o\vec{E} - \sigma_o\tau\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

et par conséquent

$$\chi = -\frac{\tau\sigma_o}{\varepsilon_o}$$

1.2.6 L'équation de Maxwell-Ampere dans le milieu conducteur

$$\vec{\text{rot}}\vec{B} = \mu_o\vec{j} + \varepsilon_o\mu_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\text{rot}}\vec{B} = \mu_o(\sigma_o\vec{E} + \varepsilon_o(1 + \chi)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$$

1.2.7 D'après l'expression précédente on tire que

$$\vec{j}_c = \sigma_o\vec{E} \quad ; \quad \vec{j}_d = \varepsilon_o(1 + \chi)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

1.2.8 Le rapport des amplitudes :

En régimes sinusoïdales on a :

► $j_c = \sigma_o E_o$

► $j_d = \varepsilon_o|1 + \chi|\omega E_o$

Par conséquent

$$\eta = \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o|1 + \chi|\omega}$$

1.2.9**1.2.9.1** La pulsation ω_c

$$\eta = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o|1 + \chi|}$$

1.2.9.2 Pour le cuivre

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} \Rightarrow f_c = \frac{\sigma_o}{2\pi\varepsilon_o|1 + \chi|} \xrightarrow{\text{A.N}} f_c = 6,3 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

elle appartient au domaine infra-rouge.

► pour le visible

$$\eta = \frac{f_c}{f} \xrightarrow{\text{A.N}} \eta \simeq 10^{-2} \ll 1$$

Le cuivre se comporte comme un isolant

2^{ème} Partie : Propagation d'ondes électromagnétiques dans les conducteurs ohmiques

2.1 Relation de dispersion dans un conducteur ohmique

2.1.1 Domaine de fréquence :

Comme $\sigma = \sigma_1 - i\sigma_2 \Rightarrow \sigma = \sigma_o - i\sigma_2$

$$\vec{j} = \sigma_o \vec{E} \Rightarrow f \ll f_1$$

Domaine infrarouge.

2.1.2 L'équation de Maxwell-Ampère pour le conducteur ohmique

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_o (\sigma_o \vec{E} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

2.1.3 L'équation de propagation du champ électrique

On calcule le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday on obtient :

$$\Delta \vec{E} - \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_o \sigma_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

2.1.4 Justification : Puisque l'équation de propagation est linéaire alors le théorème de superposition reste valable.

2.1.5 L'équation différentielle vérifiée par $E(z)$.

Par projection de l'équation différentielle sur l'axe Ox et sachant que E ne dépend que de z et le temps alors. l'équation différentielle devient

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu_o \sigma_o \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

Sachant que :

- ▶ $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = E''(z)e^{i\omega t}$
- ▶ $\frac{\partial E}{\partial t} = i\omega E(z)e^{i\omega t}$
- ▶ $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E(z)e^{i\omega t}$

Ce qui donne

$$E''(z) + (\mu_o \epsilon_o \omega^2 - i\mu_o \sigma_o \omega) E(z) = 0$$

2.1.6 Montrons l'équation (4) :

Sachant que : $E(z) = E_1 e^{ikz} + E_2 e^{-ikz} \Rightarrow E''(z) = -k^2 E(z)$ alors en remplaçant dans l'équation différentielle on obtient

$$E(z)(-k^2 + \mu_o \epsilon_o \omega^2 - i\mu_o \sigma_o \omega) = 0 \Rightarrow k^2 = \mu_o \epsilon_o \omega^2 - i\mu_o \sigma_o \omega$$

2.1.7

2.1.7.1 L'expression du champ magnétique :

d'après L'équation de Maxwell-Faraday on a :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B}(z, t) = \frac{k}{\omega} \vec{e}_z \wedge \vec{E}(z, t) \Rightarrow \vec{B}(z, t) = \frac{k}{\omega} E(z, t) \vec{e}_y$$

2.1.7.2 Les champs \vec{B} et \vec{E} sont déphasés parce que k est complexe.

2.2 Propagation dans un mauvais conducteur

2.2.1 En faisant un DL on obtient

$$k = k_o - i \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o\omega} \Rightarrow \ell_p = \frac{2\varepsilon_o c}{\sigma_o} = \frac{2}{\sigma_o} \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}$$

2.2.2 Comparaison :

$$\frac{\ell_p}{\lambda_o} = \frac{\varepsilon_o\omega}{\pi\sigma_o} \gg 1$$

Commentaire : $k \simeq k_o$ Le milieu se comporte comme le vide.

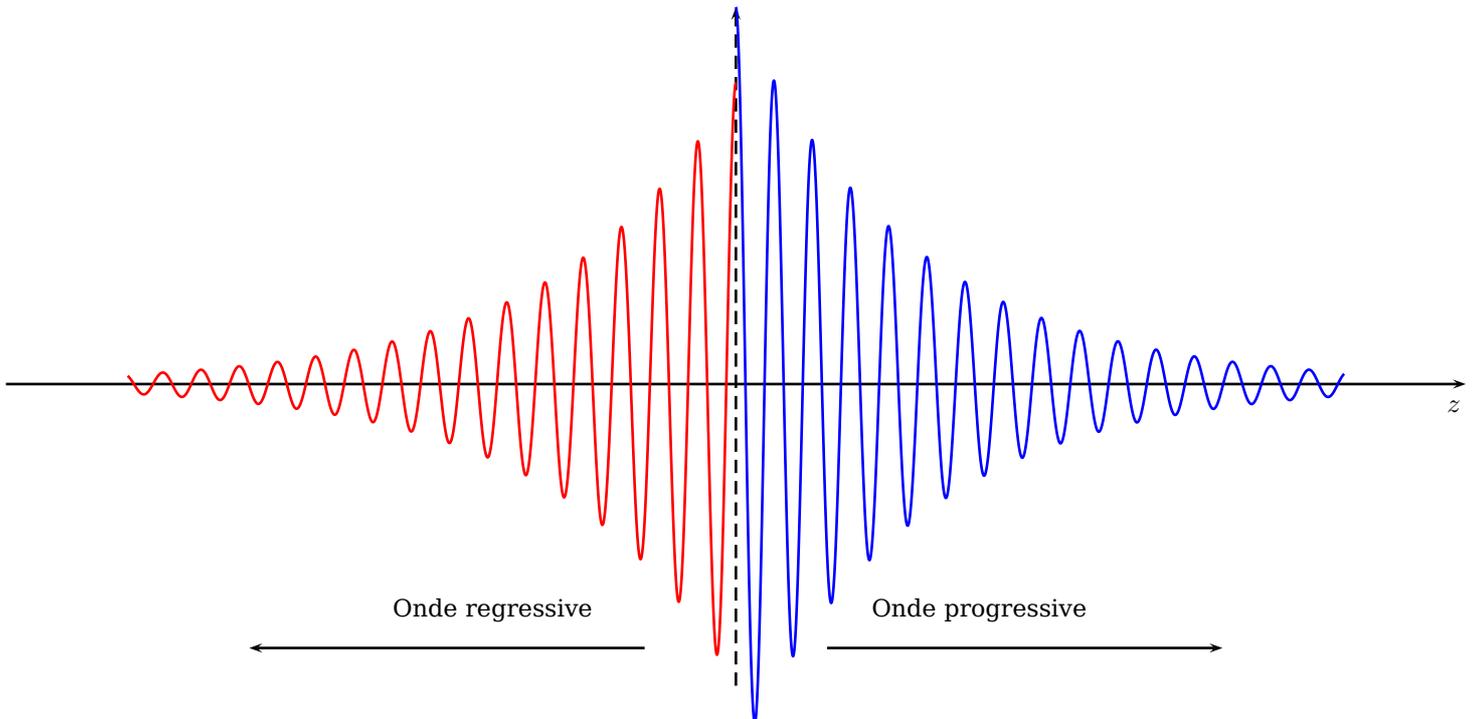
2.2.3 L'expression complexe

$$\vec{E}(z, t) = E_1 \exp i(kz + \omega t) + E_2 \exp i(-kz + \omega t)$$

2.2.4 L'expression réelle du champ

$$E(z, t) = E_1 \exp(z/\ell_p) \cos(\omega t + k_o z) + E_2 \exp(-z/\ell_p) \cos(\omega t - k_o z)$$

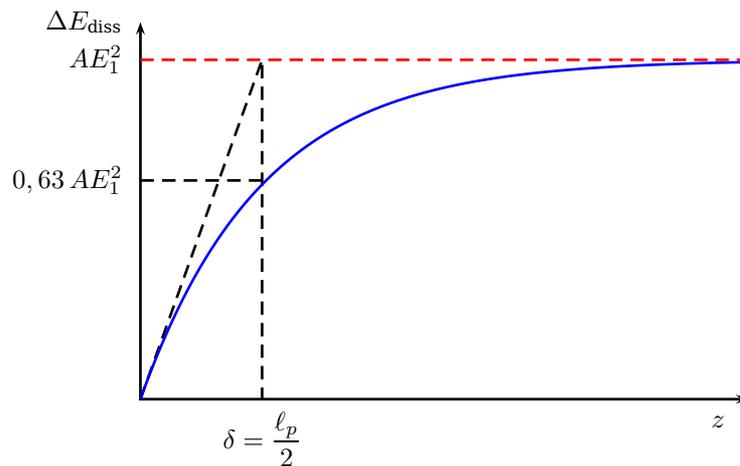
- ▶ $E_1 \exp(z/\ell_p) \cos(\omega t + k_o z)$: Onde regressive dont l'amplitude décroît lorsque $|z|$ augmente.
- ▶ $E_2 \exp(-z/\ell_p) \cos(\omega t - k_o z)$: Onde progressive dont l'amplitude décroît lorsque z augmente.
- ▶ Représentation graphiques



2.2.5

- ▶ L'amplitude de l'onde diminue en fonction de z d'où on a dissipation de l'énergie.
- ▶ Cette énergie perdue est transformée en chaleur (effet de Joule) dans le conducteur.
- En absence de l'effet joule l'énergie vaut AE_1^2
- En présence de l'effet joule l'énergie vaut $A(E_1 \exp(-z/\ell_p))^2$
- L'énergie dissipée vaut $\Delta E = AE_1^2(1 - \exp(-2z/\ell_p))$

La représentation graphique de L'énergie dissipée en fonction de z



2.3 Propagation dans les bons conducteurs : l'effet de peau

2.3.1 L'expression approchée du vecteur d'onde :

On a :

$$k^2 = -i\omega\mu_0\sigma_0 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_0}{2}}(1-i) = \frac{1-i}{\delta}$$

avec : $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_0}}$ profondeur de peau.

2.3.2 Comparaison : sachant que $\lambda = cT \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ alors :

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_0\omega}{2\sigma_0}} \ll 1 \Rightarrow \delta \ll \lambda$$

2.3.3 L'expression complexe du champ électrique :

On a : $\vec{E}(z, t) = (E_1 e^{ikz} + E_2 e^{-ikz}) e^{i\omega t} \vec{e}_x \Rightarrow$

$$\vec{E}(z, t) = [E_1 e^{z/\delta} e^{i(\omega t + z/\delta)} + E_2 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}] \vec{e}_x$$

► L'expression réelle du champ électrique :

$$\vec{E}(z, t) = [E_1 e^{z/\delta} \cos(\omega t + \varphi_1 + z/\delta) + E_2 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta + \varphi_2)] \vec{e}_x$$

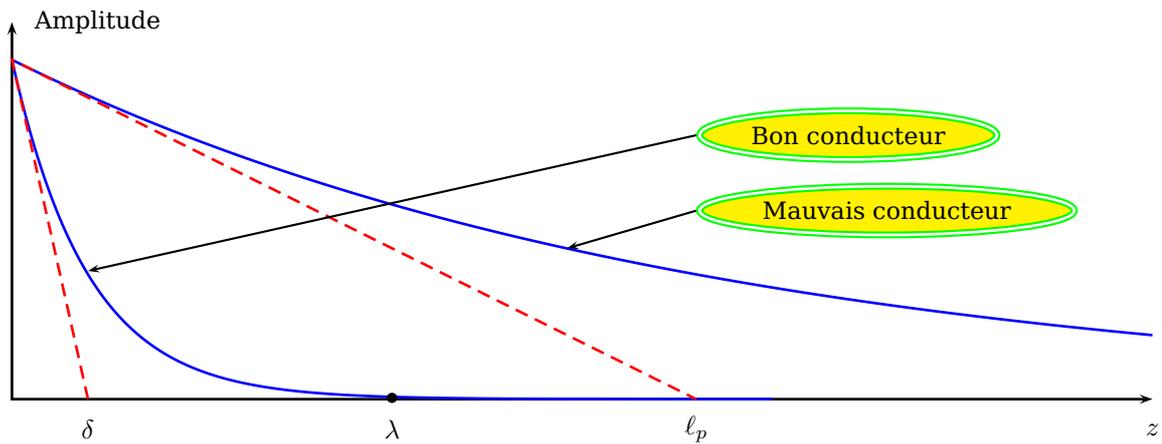
Le champ résultant est la somme de deux ondes progressive et regressive dont les amplitudes diminuent ; la constante δ représente la distance nécessaire pour que l'amplitude se divise par e .

2.3.4 Dans les deux cas on a atténuation de l'amplitude d'où même comportement que les mauvais conducteurs .

Commentaire:

Dans les deux cas (bon et mauvais conducteur) on a $E(z, t)$ est la superposition d'une onde progressive et d'une onde regressive avec amplitude décroissante de constante d'atténuation (épaisseur de peau ou profondeur de pénétration) :

- $\ell_p \gg \lambda$ pour les mauvais conducteurs.
- $\delta \ll \lambda$ pour les bons conducteurs.



2.4 Réflexion d'une onde électromagnétique par un conducteur réel

2.4.1 Les expressions du champ magnétique de l'onde incidente et de l'onde réfléchi

On a d'après l'équation de Maxwell-Ampère : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ce qui donne en notation complexe

$$\omega \vec{B}_i = \vec{k}_i \wedge \vec{E}_i \implies \vec{B}_i = \frac{E_i}{c} e^{i(\omega t - k_o z)} \vec{e}_y$$

De la même façon pour le champ magnétique réfléchi : avec $\vec{k}_r = -k_o \vec{e}_z$

$$\omega \vec{B}_r = \vec{k}_r \wedge \vec{E}_r \implies \vec{B}_r = -\frac{E_r}{c} e^{i(\omega t + k_r z)} \vec{e}_y$$

Pour le champ magnétique total :

$$\vec{B}(t, z < 0) = \vec{B}_i(t, z) + \vec{B}_r(t, z) \implies \vec{B}(t, z < 0) = \left(\frac{E_i}{c} e^{i(\omega t - k_o z)} - \frac{E_r}{c} e^{i(\omega t + k_r z)} \right) \vec{e}_y$$

2.4.2 L'expression du champ magnétique $\vec{B}_t(z, t)$ de l'onde transmise dans le conducteur.

L'équation de Maxwell-Ampère : $\vec{\text{rot}} \vec{E}_t = -\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t}$ donne en notation complexe :

$$\omega \vec{B}_t = \vec{k}_t \wedge \vec{E}_t \implies \vec{B}_t(M, t) = \frac{k}{\omega} E_t e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y$$

2.4.3 Les relations de passage que doivent vérifier les champs électrique magnétique sur l'interface entre le vide et le milieu conducteur :

$$\vec{E}(z = 0^+, t) - \vec{E}(z = 0^-, t) = \frac{\sigma}{\epsilon_o} \vec{e}_z \quad (E1)$$

$$\vec{B}(z = 0^+, t) - \vec{B}(z = 0^-, t) = \mu_o \vec{j}_s \wedge \vec{e}_z \quad (E2)$$

2.4.4 Les deux relations lient E_i , E_r et E_t

► La projection de l'équation (E1) suivant \vec{e}_x en $z = 0$ donne (continuité de la composante tangentielle du champ \vec{E}) :

$$E_t = E_i + E_r \quad (1)$$

► La projection de l'équation (E2) suivant \vec{e}_z en $z = 0$ donne :

$$B_i + B_r = B_t \implies \frac{E_i}{c} - \frac{E_r}{c} = \frac{k}{\omega} E_t \quad (2)$$

Sachant que $k_o = \frac{\omega}{c}$ alors

$$E_i - E_r = \frac{k}{k_o} E_t \quad (3)$$

2.4.5 Les expressions de E_r et E_t :

► (1)+(3) donne

$$E_t = \frac{2k_o}{k_o + k} E_i$$

► (1)-(3) donne

$$E_r = \frac{k_o - k}{k_o + k} E_i$$

2.4.6 Cas du mauvais conducteur

On rappelle que pour un mauvais conducteur $k = k_o - \frac{i}{\ell_p}$

2.4.6.1 Détermination des expressions approchées des amplitudes :

► L'amplitude de l'onde réfléchie :

$$E_r = \frac{k_o - k}{k_o + k} E_i \implies E_r = \frac{\frac{i}{\ell_p}}{2k_o - \frac{i}{\ell_p}} E_i$$

► L'amplitude de l'onde transmise :

$$E_t = \frac{2k_o}{k_o + k} E_i \implies E_t = \frac{2k_o}{2k_o - \frac{i}{\ell_p}} E_i$$

2.4.6.2 Comparaison des amplitudes

On rappelle que $\ell_p \gg \lambda \implies \ell_p \rightarrow \infty$ ce qui donne

$$E_t \rightarrow E_i \quad ; \quad E_r \rightarrow 0$$

Commentaire : Pour un mauvais conducteur toute l'onde incidente est transmise (pas d'onde réfléchie)

2.4.7 Cas du bon conducteur

On rappelle que pour un bon conducteur

$$k = \frac{1-i}{\delta} \text{ avec } \delta \ll \lambda \implies \delta \rightarrow 0$$

2.4.7.1 Détermination des expressions approchées des amplitudes :

► L'amplitude de l'onde réfléchie :

$$E_r = \frac{k_o - k}{k_o + k} E_i \implies E_r = (k_o - k) \frac{\delta}{k_o \delta 1 - i} E_i = (k_o - k) \delta (k_o \delta 1 - i)^{-1} E_i$$

En remplaçant k par $\frac{1-i}{\delta}$ et $(k_o \delta 1 - i)^{-1}$ par $(1-i) - k_o \delta$ on obtient à l'ordre 1 en δ :

$$E_r \simeq (1-i)[2k_o \delta - (1-i)] E_i$$

► L'amplitude de l'onde transmise :

$$E_t = \frac{2k_o}{k_o + k} E_i \implies E_t = \frac{2k_o \delta}{1-i} E_i$$

2.4.7.2 Comparaison des amplitudes

$$E_t \rightarrow 0 \quad ; \quad E_r \rightarrow E_i$$

Commentaire : Pour un bon conducteur toute l'onde incidente est réfléchi (pas d'onde transmise)

2.4.8 Conclusion :

Pour un bon conducteur toute l'énergie incidente est réfléchi contrairement à un mauvais conducteur toute l'énergie incidente est totalement transmise.

3^{ème} Partie : Propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma

3.1 Dynamique d'un plasma libre

3.1.1 L'équation d'évolution dans le temps de la densité volumique de courant :

La notation réelle de l'équation (5) donne :

$$\vec{j} + \tau(i\omega)\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} \implies \vec{j} + \tau\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}$$

3.1.2 Montrons l'équation d'évolution de la densité volumique de charge :

D'après l'équation locale de la conservation de charge :

$$\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \implies \operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Ainsi l'équation de Maxwell-Gauss $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ Il en résulte que

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{ne^2}{m\epsilon_0}\rho \implies \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$$

3.1.3 L'évolution dans le temps de la densité volumique de charge :

Pour $\omega_p \rightarrow 0$ on a :

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \implies \frac{\partial\rho}{\partial t} = A_0 e^{-t/\tau}$$

et donc

$$\rho(t) = A e^{-t/\tau} + B$$

3.1.4 Montrons que le plasma est le siège d'oscillations :

Pour une faible dissipation et une densité électronique importante on a : $\frac{1}{\tau} \rightarrow 0$ et l'équation devient

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + \omega_p^2\rho = 0 \implies \rho(t) = A_1 \cos \omega_p t + B_1 \sin \omega_p t$$

Donc des oscillations de pulsation ω_p

3.2 Propagation d'ondes dans un plasma

3.2.1 L'expression de la densité de courant :

On a :

$$\vec{j} = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{i\omega} \vec{E} \implies \vec{j} = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{i\omega} \vec{E}$$

3.2.2 Relation de dispersion

3.2.2.1 L'équation de propagation à laquelle obéit le champ électrique :

$$\text{On a : } \vec{j} = \frac{\varepsilon_o \omega_p^2}{i\omega} \vec{E} \implies \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \varepsilon_o \omega_p^2 \vec{E}$$

$$\text{On a : } \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial(\text{rot} \vec{B})}{\partial t}$$

$$\text{Or } \text{rot} \vec{B} = \mu_o \left(\vec{j} + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \implies \Delta \vec{E} = \mu_o \varepsilon_o (\omega_p^2 \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2})$$

Comme $\varepsilon_o \mu_o c^2 = 1$ alors

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} (\omega_p^2 \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2})$$

3.2.2.2 La relation de dispersion :

$$\text{On a : } \vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\omega t - kz)} \text{ donc } \Delta \vec{E} = (-ik)^2 \vec{E} \text{ et } \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = (i\omega)^2 \vec{E} \text{ ce qui donne}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

3.2.3 Domaine des basses fréquences $\omega < \omega_p$

3.2.3.1 Détermination de l'expression du vecteur d'onde k dans le domaine des basses fréquences :

Comme $\omega < \omega_p$ alors $k^2 < 0$ donc

$$k = \frac{i}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$$

3.2.3.2 L'expression du champ électrique dans le cas des basses fréquences :

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\omega t - kz)} \implies \vec{E} = \vec{E}_o e^{i\omega t} e^{\frac{z}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

En notation réelle

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{\frac{z}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}} \cos \omega t$$

Pas de propagation ; L'onde incidente ne se propage pas , elle se réfléchit

Remarque

Le plasma est équivalent à un filtre passe-haut

3.2.3.3 le domaine de fréquence correspondant aux ondes électromagnétiques réfléchies par l'ionosphère :

$$\text{On a : } \omega < \omega_p \implies f < f_p \xrightarrow{\text{A.N}} f_p = 89,7 \text{ kHz}$$

Domaine des ondes métriques ($\lambda_p = 334 \text{ m}$)

Application pratique : l'ionosphère représente comme filtre pour les ondes sonores.

3.2.4 Domaine des hautes fréquences $\omega > \omega_p$

3.2.4.1 L'expression du vecteur d'onde dans le domaine des hautes fréquences :

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

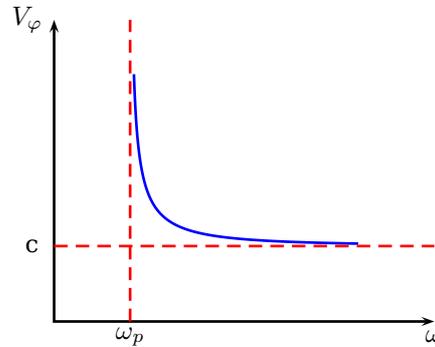
3.2.4.2 L'expression du champ électrique dans le cas des hautes fréquences :

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\omega t - kz)}$$

- ▶ Onde plane progressive monochromatique.
- ▶ La vitesse de phase

$$V_{\varphi} = \frac{\omega}{k} \implies V_{\varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

- ▶ Représentation graphique



Commentaire : La vitesse de phase est supérieure à c

$$V_{\varphi} > c$$

3.3 Propagation d'un battement entre deux ondes dans un plasma

3.3.1 Sachant que $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Par conséquent

$$E = 2E_o \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}z\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}z\right)$$

Il en résulte que

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{et} \quad \omega_b = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

3.3.2

- ▶ La vitesse de propagation V_r de l'onde haute fréquence :

$$V_r = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} = \frac{2\omega_1 + \delta\omega}{2k_1 + \delta k} \implies V_r = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$$

- ▶ La vitesse de propagation V_g de l'onde basse fréquence :

$$V_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{\delta\omega}{\delta k}$$

C'est la vitesse de groupe

▶ On a : $k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \implies V_r = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_1 c}{\sqrt{\omega_1^2 - \omega_p^2}}$

Ce qui donne

$$V_r = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_1}\right)^2}}$$

► Comme $k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \implies \frac{dk}{d\omega} = \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} \implies V_g = \frac{c}{\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

Commentaire :

$$V_r > c \quad V_g < c \quad V_g V_r = c^2$$